

# 正弦函数作用下的 Martin 过程

周志敏 汪国昭

(浙江大学数学系, 杭州 310027)

**摘要** 为了弥补单纯 Martin 过程在描述天气、石油和股市行情等变化过程方面的不足, 首先通过对正弦函数作用下的 Martin 过程进行相图分析, 发现该系统状态随着参数的变化而变化, 同时经过稳定焦点、倍周期分岔, 可将其收缩到混沌吸引子上, 且这个状态变化过程会重复出现, 然后进一步通过计算机从理论上计算了该系统的最大 Lyapunov 指数, 并通过绘制了分岔图定量地说明了该系统具有混沌行为。

**关键词** Martin 过程 吸引子 Lyapunov 指数 混沌

中图法分类号: TP391.77 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2006)09-1288-05

## Martin Process on Sine Function

ZHOU Zhi-min, WANG Guo-zhao

(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** In this paper, it is discovered that the state of Martin process on sine function varies with the parameters. The system state varies from steady focus and multiple bifurcation to strange attractors, moreover this process repeats once again. The system is further shown to be chaos quantificationally by computing the largest Lyapunov exponent and drawing phase portrait of this system.

**Keywords** Martin process, attractor, Lyapunov exponent, chaos

## 1 引言

受 Mandelbrot 集产生思想的影响, Martin 提出了一对公式, 而利用该公式和同样简单的计算机程序便可产生非常新奇的图形, 由于图形的产生过程会有爆炸现象出现, 因此可以用来描述高层次的复杂及突变的现象, 如天气的突然变冷、全球石油价格的暴涨以及股市行情的瞬息万变等。但是, 由于现实自然界中的温度变化范围及石油价格的增长是有界的, 而股市行情的变化也是有限制的, 也就是说, 这些现象最终将在一个有界区域内变化, 即可能存在混沌吸引子。尽管文献 [1, 2] 已分别指出天气变化、股票价格波动存在着混沌现象, 但是由于 Martin 过程迭代产生的点

集好像是发散的, 其并不能准确地解释上述现象的有界行为, 因此本文首先选取正弦函数作用于 Martin 过程来使得系统在一个有界区域内变化; 同时, 进一步计算了正弦函数作用下的 Martin 过程的最大 Lyapunov 指数, 结果表明, 由于该过程具有混沌行为, 因此可以更好地描述上述现象。

## 2 正弦函数作用 Martin 过程的混沌行为

从特定的数学模型出发, 并通过它们来模拟自然界中的某些事物, 可以说是一项极其复杂而艰巨的课题。但是, 如果通过利用一些纯粹的数学公式进行迭代来接近自然界却是可能的。事实上,

基金项目: 国家自然科学基金项目(60473130); 国家重点基础研究发展规划(“973”计划)项目(2004CB318000); 中国博士后基金项目(2005037820)

收稿日期: 2004-11-10 改回日期: 2005-10-18

第一作者简介: 周志敏(1978~), 女, 2005 年获浙江大学硕士学位。主要研究方向为计算机图形学与计算机辅助几何设计。E-mail: flashedblack@yahoo.com.cn

Martin 过程即是这样的一个过程。Martin 所提出的迭代公式如下：

$$\begin{cases} x_{\text{new}} = y \cdot \text{sgn}(x) \cdot \sqrt{|b \cdot x - c|} \\ y_{\text{new}} = a - x \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

上式即为一动力系统,通过调试参数  $a, b, c$  就可在计算机上得到如图 1,图 2 所示的图形。

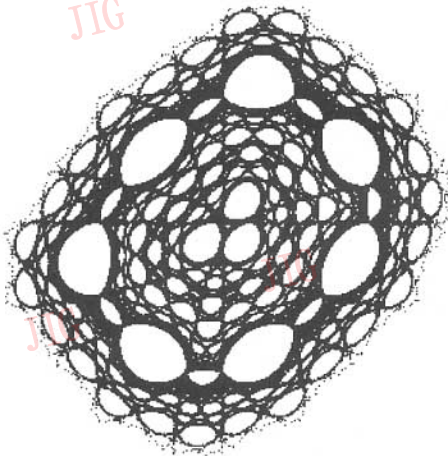


图 1  $a = 68, b = 75, c = 83$  时的 Martin 过程

Fig. 1 Martin process for  $a = 68, b = 75, c = 83$

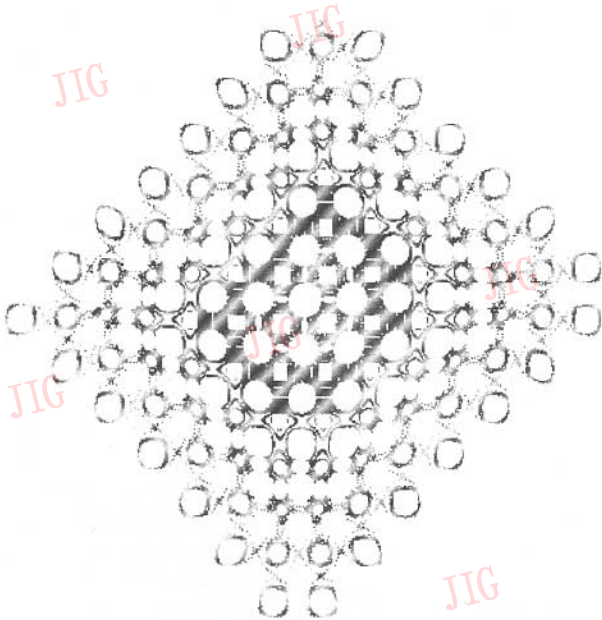


图 2  $a = 45, b = 2, c = -300$  时的 Martin 过程

Fig. 2 Martin process for  $a = 45, b = 2, c = -300$

实际上,更有趣的是图形的产生过程。图 1 像一个 4 瓣的柠檬皮,其产生过程会有间隙爆炸的现

象出现,很像某种细胞或者组织的生长过程。图 2 的产生过程有更加明显的爆炸现象,当系统迭代 5 000 次时,得到的是一个规则的网状结构,其由圆圈和直线构成;当迭代到 26 000 次后,网格便向外伸出了几条线段;再迭代 2 000 次,图形突然从中间开始向外爆炸,后来又出现第 2 次爆炸。这预示着预先肯定有一些很小的变化在起作用,而它所产生的结果却是突然的、巨大的、使人难以预料的。

本文所建立的迭代公式如下：

$$\begin{cases} x_{\text{new}} = \sin(y - \text{sgn}(x) \cdot \sqrt{|b \cdot x - c|}) \\ y_{\text{new}} = \sin(a - x) \end{cases} \quad (2)$$

实际上,这仍旧是一个动力系统(以下简称系统)。该系统的动力学行为是由控制参数  $a, b, c$  决定的。该系统的迭代过程是,首先,在给定初值  $x_0 = 0, y_0 = -0.1$  的情况下,迭代 900 000 次,然后通过调整参数  $a, b, c$  来得到如下  $x \leftrightarrow y$  相图(图 3),最后可以参照这些图来研究系统行为的演化过程。这些图是具有一定意义的,因为它们反映了整个迭代过程系统的状态变化情况,其不仅是漂亮的,而且在不规则中又蕴涵了整体上规则的效果。

对于一个由  $N$  个一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (3)$$

描述的运动,式中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 。Lanford 曾对吸引子下了如下的定义<sup>[3]</sup>:相空间的一个子集  $A$  称为吸引子,如果它同时具有如下性质(1)  $A$  对于式(3)的流是不变的;(2)存在一个  $A$  的邻域,它在式(3)所确定的流下收缩至  $A$ ;(3)在  $A$  上的流是循环的,也就是说,对  $x$  点的任一邻域,在足够长的时间中,通过  $A$  中  $x$  的轨道总会再次经过这一邻域;(4)  $A$  不能分解为两个不重叠的部分。事实上,图 3(a)~图 3(f)显示,正弦函数作用下的 Martin 过程都收敛于一个集合,其中图 3(a)和图 3(e)是收敛于一个点,而图 3(b),图 3(c),图 3(d),图 3(f)则是收敛到几个点或者几十个,它们都是不动点吸引子,其维数为零,是简单吸引子。通常将具有非整数维数的吸引子称为奇异吸引子,也称为“随机吸引子”或“混沌吸引子”,它包含很多随机的因素,比简单吸引子奇怪得多,它是相空间中无穷多个点的集合,而且这些点是对应于该系统的混沌状态的。奇异吸引子的出现常常是系统进入混沌状态的直接体现,它的特性在于,系统的运动轨道从整体上看是稳定的,但是从局部看来却是不稳定的,其要沿某

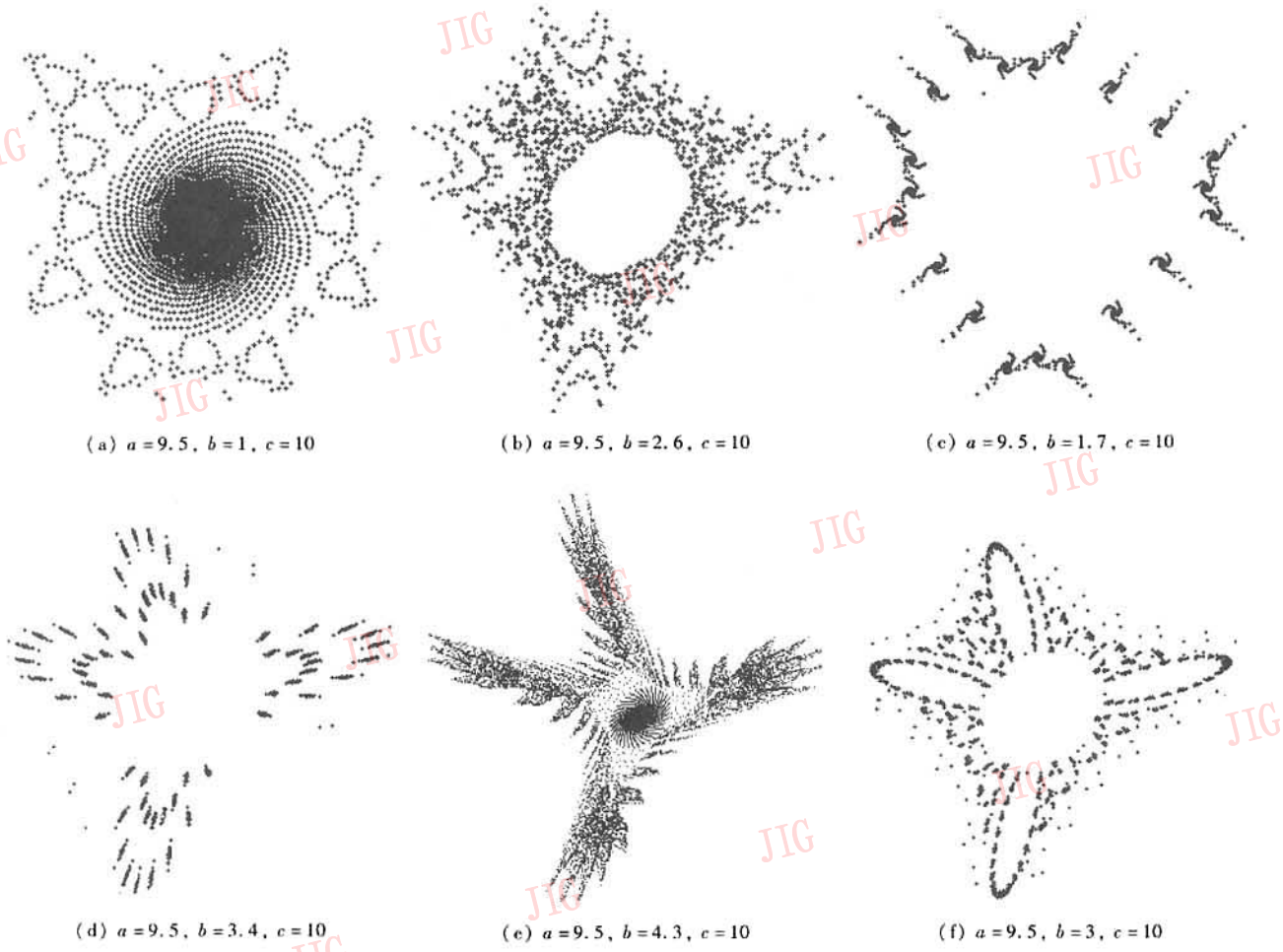


图 3 正弦函数作用下的 Martin 过程的几种吸引子

Fig. 3 A few of attractors appearing in Martin process on sine function

些方向呈指数分离 指数分离体现在几何上就是无穷次的折叠起来,也就是在相空间图中构造出一个无穷嵌套的自相似结构。另外,借助于计算机,还可以描绘出奇怪吸引子的图形。图 4(a) 鸟形奇怪吸引

子) 图 4(b) 蛇形奇怪吸引子) 图 4(c) 蛇形奇怪吸引子) 就是该系统的奇怪吸引子。以上图形表明,正弦函数作用下的 Martin 过程随着参数的变化出现了稳定焦点和混沌吸引子。在模拟该系统状态变化

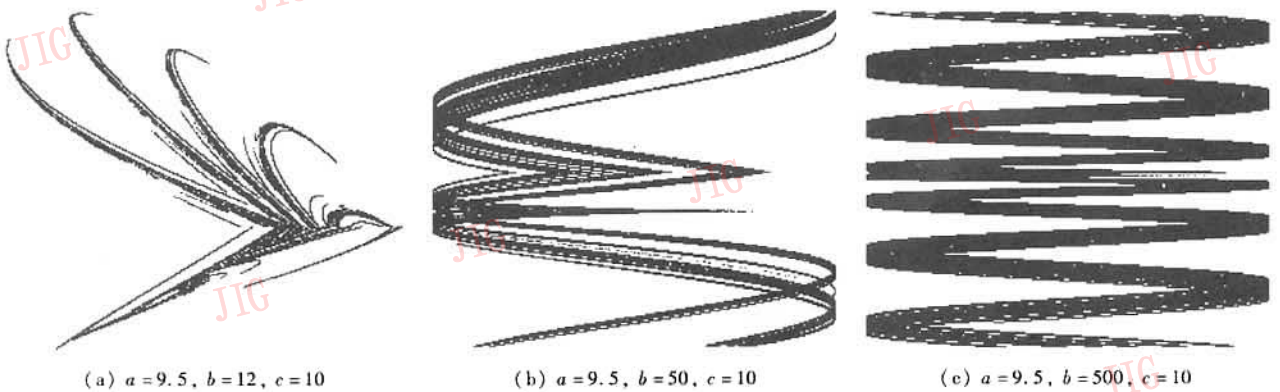


图 4 正弦函数作用下的 Martin 过程的几种奇怪吸引子

Fig. 4 A few of strange attractors appearing in Martin process on sine function

时,从计算机上可以明显的看出,该系统的状态点像雨点似的打在图中所示区域,这恰恰表现了该系统的不稳定性,但是从整体上看,它们都落在一个特定的集合中,这又表现了该系统的整体稳定性。

下文将定量的说明该系统是具有混沌行为的。

### 3 定量的描述系统的混沌行为

#### 3.1 Lyapunov 指数

由于 Lyapunov 指数表明了相空间中邻近轨道平均收敛或发散的指数率,当其为正时,则相空间运行轨道的初始差异将以指数般的速度显现出来,即表现为对初值极端敏感性,此时系统处于混沌状态;当其为零时,则各轨道间的距离保持不变,此时系统的运动状态对应分岔点,当其为负时,则运动轨道之间的距离按指数消失,此时系统的运动状态对应着周期运动或者不动点,因此只要判定最大 Lyapunov 指数为正,且至少有一个 Lyapunov 指数为负,则就可判断该系统为混沌系统,而且最大 Lyapunov 指数越大,系统的混沌性越强。Lyapunov 指数的计算方法有很多,大致有混合熵法<sup>[4,5]</sup>、Jacobian 算法<sup>[6]</sup>和 Wolf 算法<sup>[7]</sup>。近几年关于 Lyapunov 指数的论文也有很多,如文献<sup>[8,9]</sup>就介绍了这方面的内容。本文采用的方法是 Jacobian 算法<sup>[10]</sup>。

Lyapunov 指数  $\lambda$  的计算公式如下:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln(\mu_{n-1} \times \mu_{n-2} \times \dots \times \mu_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \mu_i \quad (4)$$

其中  $\mu_i$  为 Jacobian 矩阵  $J_n$  的特征值。图 5 是该系统的 Lyapunov 指数图,虽然该系统中存在 3 个参变量,但本文固定了两个变量  $a$  和  $c$  ( $a=9.5, c=10$ )。

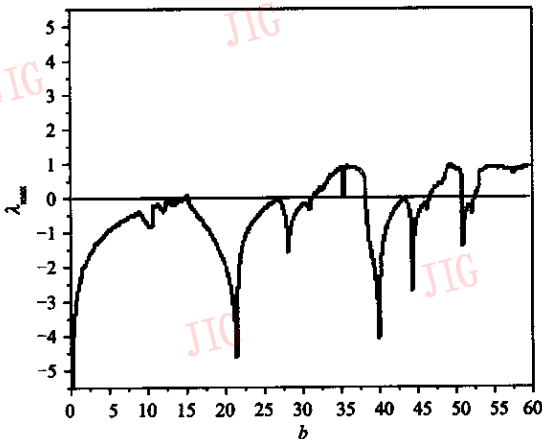


图 5 Lyapunov 指数图

Fig. 5 Sketch map of the Lyapunov exponent

由图 5 可以看出,正弦函数作用下的 Martin 过程在参数  $b$  到达 15、35、47、55 附近时,出现了正的 Lyapunov 指数,这表明该系统处于混沌状态,此时的吸引子为混沌吸引子。为了进一步弄清系统是如何进入混沌状态的,本文研究了该系统的分岔过程。

#### 3.2 系统的分岔过程

在一个动力学系统中,当控制参量改变时,分岔就反映了其相图发生拓扑结构的突然变化。分岔的种类很多,最常见的有:叉型分岔或对称鞍结点分岔、切分岔或鞍结点分岔、跨临界分岔、滞后分岔、Hopf 分岔、倍周期分岔、同宿和异宿分岔。本文利用 VC++ 程序得到了该系统的分岔图(如图 6 所示)这里仍旧固定参变量  $a$  和  $c$  ( $a=9.5, c=10$ )。由图 6 可以看出,该系统通过明显的倍周期分岔(Feigenbaum 途径)进入混沌状态,但同时又是阵发性通往混沌状态的,属于间歇(阵发)混沌模型。这恰好与 Martin 过程产生的爆炸现象相吻合,具有间歇性。

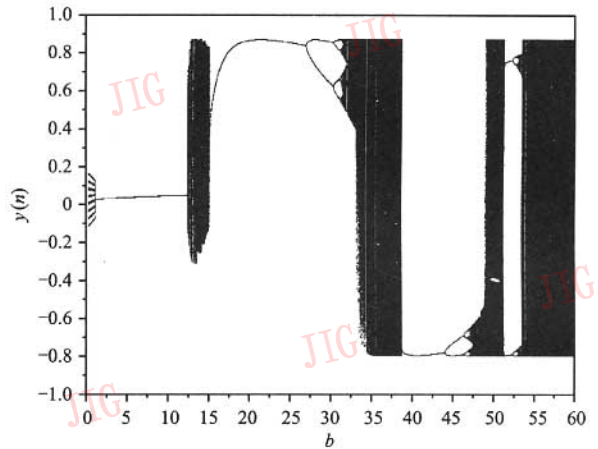


图 6 分岔图

Fig. 6 Sketch map of the bifurcation

### 4 结论与意义

综上所述,可以得出如下结论:

- (1) 正弦函数作用下的 Martin 过程的相图表明,其运动轨迹存在有奇怪吸引子;
- (2) 由于最大 Lyapunov 指数为正,这就定量地证明了正弦函数作用下的 Martin 过程具有混沌性,分岔图也揭示了该过程是经过倍周期分岔和阵发两种途径通向混沌的。

正弦函数作用下的 Martin 过程所表现的混沌行为,其不仅弥补了单纯 Martin 过程在描述天气、石油和股市行情的变化时的缺陷,并可用于更好地描述上述变化。

### 参考文献 (References)

- 1 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flows [ J ]. Journal of Atmospheric Science ,1963 ,**35**( 20 ) :130.
- 2 Wang Wei-ning , Wang Bing-hong , Shi Xiao-ping. Chaotic analysis of the fluctuating stock prices [ J ]. The Journal of Quantitative & Technical Economics ,2004 ,( 4 ) :141 ~ 147. [ 王卫宁,汪秉宏,史晓平. 股票价格波动的混沌行为分析 [ J ]. 数量经济技术经济研究 ,2004 ,( 4 ) :141 ~ 147. ]
- 3 Wang Xin-yuan. Chaos in complex nonlinear systems [ M ]. Beijing : Publishing House of Electronics Industry ,2003 6. [ 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌 [ M ]. 北京 :电子工业出版社 2003 6. ]
- 4 Chang Shau-jin , Wright Jon. Transitions and distribution functions for chaotic systems [ J ]. Physical Review A ,1981 ,**23**( 3 ) :1419.
- 5 Wright J. Method for calculating a Lyapunov exponent [ J ]. Physical Review A ,1984 ,**29**( 5 ) :2924.
- 6 Barana G , Tsuda I. A new method for computing Lyapunov exponents [ J ]. Physics Letters A ,1993 ,**175**( 6 ) :421.
- 7 Wolf A , Swift J B , Swinney H L , et al. Determining Lyapunov exponents from a time series [ J ]. Physica D ,1985 ,**55**( 10 ) :1082.
- 8 Lu Jia , Yang Guo-lai , Hyounkyun Oh , et al. Computing Lyapunov exponents of continuous dynamical systems : method of Lyapunov vectors [ J ]. Chaos Solitons & Fractals ,2005 ,**23**( 5 ) :1879.
- 9 Andrzej Stefanski , Artur Dabrowski , Tomasz Kapitaniak. Evaluation of the largest Lyapunov exponent in dynamical systems with time delay [ J ]. Chaos Solitons & Fractals ,2005 ,**23**( 5 ) :1651.
- 10 Huang Run-sheng. Chaos & its Applications [ M ]. Wuchang : Publishing House of Wuhan University ,2000. [ 黄润生. 混沌及其应用 [ M ]. 武昌 :武汉大学出版社 2000. ]